Géométrie dans l'Espace

I. Préambule

La notions d'axiome

Une figure géométrique n'a pas d'existence réelle. Personne n'a jamais rencontré de vraie droite dans notre monde **sublunaire**. Car rien en ce bas monde n'est parfaitement droit. Et si l'on en rencontrait une, comment la verrions-nous, puisqu'elle est infiniment fine ? Et si nous parvenions à la voir, comment vérifierions-nous, pauvres mortels que nous sommes, qu'elle se prolonge à l'infini ?

> **(…) leurs raisonnements [ceux des géomètres et des arithméticiens] portent sur le carré *en soi* et sur la diagonale *en soi*, et non pas sur les *traces* de ce carré ou de cette diagonale, et de même pour les autres figures. Tous ces dessins, en effet, qu'ils modèlent et qu'ils tracent, ces dessins qui possèdent leurs ombres et leurs reflets sur l'eau, les géomètres s'en servent comme autant d'images dans leur recherche pour contempler des êtres *en soi* qu'il est impossible de contempler autrement que par la pensée.**

À la fin du livre VI de La République, juste avant d'aborder son célèbre « *mythe* » *de la caverne*, Platon rappelle à son lecteur que les dessins sur la feuille ne sont pas des figures géométrique, mais seulement des représentations de celles-ci. Et puisque les figures géométriques sont de pures *idéalités*, dont les dessins sur une feuille ne sont que d'imparfaites représentations, ce qu'on peut en dire ne

peut venir de notre perception, mais doit venir de notre esprit. Et comme aucune révélation transcendante ne nous vient les concernant, c'est plus précisément par des *raisonnements* qu'on prend possession de ces êtres abstraits. Les raisonnement mathématiques, les preuves, visant à affirmer des vérités sur les objets mathématiques s'appellent des *démonstrations*. Une affirmation démontrée s'appelle un *théorème*. Lors d'une démonstration géométrique, il est exclu de dire « on voit que », car on ne voit rien, justement. Il est exclu, aussi, de généraliser à partir de quelques exemples. Mais alors sur quoi se fondent ces raisonnements ? Sur ce qui a été prouvé avant : on démontre des théorèmes en s'appuyant sur des théorèmes antérieurs. Mais il faut bien qu'il y ait quelque chose au départ, quelque vérité initiale sur quoi s'appuyer. Ce sont les **axiomes** : des « évidences », ou des vérités qu'on a décrétées et qu'en tout cas on ne peut prouver, mais à partir desquelles on devra prouver tout le reste.

Voici par exemple une liste d'*axiomes* de la géométrie plane. Je l'ai un peu arrangée pour la rendre la plus accessible possible, donc je n'en garantit pas l'absolue rigueur :

Une axiomatique de la géométrie plane

Les mots *point*, *droite*, *plan*, *entre* <u>ne sont pas définis</u>. Rappelons tout de même qu'un **plan** est, <u>intuitivement</u>, une surface parfaitement plate, infiniment fine et n'ayant pas de limite (étendue à l'infini).

1- Par deux *points* distincts, il passe une *droite* et une seule.

2- Une *droite* contient au moins deux *points*.

3- Le *plan* contient au moins trois *points* non alignés. (Des points <u>alignés</u> étant définis comme des points appartenant à une même droite.)

4- Sur une *droite*, un *point* donné est toujours situé *entre* deux autres *points*.

5- Trois *points* d'une *droite* étant donnés, il y en a un et un seul qui soit *entre* les deux autres. (On peut alors définir alors ce qu'est une <u>demi-droite</u>, un <u>segment</u> de droite, un <u>triangle</u>.)

6- Si une droite coupe un côté d'un triangle (ailleurs qu'en un sommet) elle en coupe au moins un autre. (On peut alors définir ce qu'est un <u>demi-plan</u>.)

7- Par un point donné, il passe une unique parallèle à une droite donnée. (Il faut auparavant avoir défini des <u>parallèles</u> comme des droites qui ne se rencontrent pas.)

8- Sur une demi-droite, on peut toujours placer un point situé à une distance donnée de l'origine. (Plus exactement, on peut reporter la longueur d'un segment donné.)

9- Une demi-droite étant donnée, il existe, dans l'un des deux demi-plans qu'elle définit, une demi-droite avec laquelle elle forme un angle donné. (On peut reporter un angle donné.)

10- Lorsque deux segments sont bout à bout, la longueur du segment total ne dépend que des longueurs de ces deux segments. (Grâce à cet axiome, on peut définir une addition sur les longueurs.)

11- Si deux triangles ont deux côtés et l'angle entre ces côtés égaux deux à deux, alors leurs autres angles et côtés sont égaux.

12- Tout ensemble de points d'un segment admet des bornes, c'est-à-dire un « plus petit » segment possible qui les contient tous.

D'AUTRES GÉOMÉTRIES

La géométrie ainsi axiomatisée est celle que nous pratiquons au collège et au lycée. Elle se nomme géométrie euclidienne (du nom d'Euclide, mathématicien grec …) En modifiant certains axiome, notamment l'axiome 7, on crée d'autres géométries. Il existe aussi des axiomatiques de l'algèbre.

RÉVISIONS

Les formules de volumes vues au collège ne sont pas rappelées dans ce cours. Elles sont présentes dans le vocabulaire de géométrie (6e – 5e) disponible sur le site *MathEnSeconde.fr*.

II. AXIOMES

AXIOME I **Par deux *points* distincts de l'espace, il passe une *droite* et une seule.** (« Alignement. »)

AXIOME II **Si un *plan* contient deux *points* distincts d'une même *droite*, il contient cette *droite* tout entière.** (« Droiture. »)

AXIOME III **Par trois *points* non alignés de l'*espace*, il passe un *plan* et un seul.** (« Tabouret. »)

NOTATION Soient A, B et C trois points non alignés. Le plan passant par ces trois points sera noté (ABC).

DÉFINITION Des *points* sont dits **coplanaires** lorsqu'il existe un *plan* contenant tous ces *points*. (De même, des droites sont dites coplanaires s'il existe un plan les contenant toutes.)

AXIOME IV **Deux *plans* ne peuvent avoir un unique *point* en commun.** (« Platitude. »)

AXIOME V **Il existe au moins quatre *points* de *l'espace* non *coplanaires*.** (« Épaisseur. »)

COMMENTAIRES

Certains axiomes de la géométrie plane doivent être étendus à l'espace, comme le 8 (report des longueurs), le 9 (report d'un angle), et le 11, premier cas d'égalité des triangles. Le 1 aussi, mais cela a été dit par l'axiome I de l'espace.

Lorsqu'on dit qu'une droite « passe par » un point, cela signifie que ce point appartient à celle droite.

THÉORÈME 1 Par une droite donnée et un point donné n'appartenant pas à cette droite, il passe un unique plan.

COMMENTAIRES

Attention, « passer par » signifie ici que la droite est (tout entière) *incluse* (voir chap. *Ensembles*.) dans le plan et non simplement que le plan couperait la droite.

Les démonstrations élémentaires, comme celle de ce théorème, ne sont pas écrites dans le cours. Nous les traiterons par oral en classe.

THÉORÈME 2 Par deux droites sécantes il passe un unique plan.

III. PLANS PARALLÈLES

DÉFINITION Deux plans sont dits **parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point en commun (ou sont confondus).

THÉORÈME 3 Deux plans qui ne sont pas parallèles ont pour intersection une droite…

DÉFINITION …on dit alors qu'ils sont sécants. (On dit aussi qu'ils se coupent.)

IV. DROITES PARALLÈLES

DÉFINITION Deux droites de l'espace sont dites **parallèles** lorsqu'elles sont coplanaires et qu'elles n'ont aucun point commun (ou sont confondues).

THÉORÈME 4 Par deux droites parallèles (et non confondues), il passe un unique plan.

THÉORÈME 5 (extension à l'espace de l'axiome des parallèles)

Dans l'espace, par un point donné, il passe une unique droite parallèle à une droite donnée.

THÉORÈME 6 (trace de plans parallèles sur un plan ; très utile)

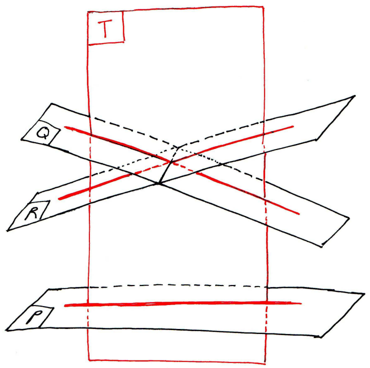
Deux plans parallèles entre eux coupent un troisième en deux droites parallèles.

THÉORÈME 7 (transitivité du parallélisme des plans)

Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.

DÉMONSTRATION

Par l'absurde. Supposons un plan P parallèle à deux plans sécants entre eux Q et R. Introduisons un plan T coupant les trois plans

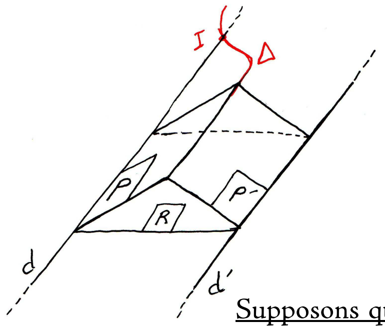


considérés (T passe par un seul point de la droite d'intersection de Q et R et au moins un point de P). On démontre aisément, <u>par le théorème 6</u>, que T coupe les trois plans de la figure en trois droites qui contredisent le postulat des parallèles (lequel dit que dans un plan, il existe une unique droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée).

THÉORÈME 8 dit « du toit »

Si deux plans sécants passent par deux droites parallèles données, la droite constituant leur intersection est parallèle à chacune des deux droites données.

DÉMONSTRATION



Soient d et d' deux droites parallèles (et distinctes, sinon le cas est trivial). Notons R le plan contenant ces deux droites. Notons P et P' deux plans passant respectivement par d et d' et <u>sécants</u> entre eux en une droite Δ. Démontrons par l'absurde que Δ est parallèle à d et à d'.

<u>Supposons que</u> Δ ne soit pas parallèle à l'une de ces deux droites. Disons d, par exemple. Alors, <u>d et Δ étant coplanaires</u>, elles seraient sécantes en un point que nous nommerons I. Or $I \in \Delta \subset P'$ donc $I \in P'$. Donc P' contient d' et I, ce qui est aussi le cas de R. Donc $P' = R$

(par le théorème 1). On démontre alors aisément que $P = P'$ (toute la figure se trouve "aplatie"), ce qui contredit l'hypothèse: P et P' <u>sécants</u>.

THÉORÈME 9 (transitivité du parallélisme des droites)

Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.

DÉMONSTRATION

Soient d et d' deux droites parallèles à une même droite Δ. Soient M un point de d' et P le plan défini par d et M. P coupe le plan contenant d' et Δ en une droite qui, <u>par le théorème du toit</u>, est forcément parallèle à Δ ; et qui ne peut être que d'. Donc d et d' sont coplanaires. Si elles étaient sécantes, ce serait forcément en un point de Δ (à prouver), ce qui contredirait les hypothèses.

V. DROITE ET PLAN PARALLÈLES

DÉFINITION Un plan et une droite de l'espace sont dits **parallèles** lorsqu'ils n'ont aucun point en commun (ou si la droite est incluse dans le plan).

THÉORÈME 10 (*caractérisation* du parallélisme entre une droite et un plan)

Une droite est parallèle à un plan <u>ssi</u> elle est parallèle à une droite de ce plan.

THÉORÈME 11 (*caractérisation* du parallélisme des plans)

Deux plans sont parallèles <u>ssi</u> l'un contient deux droites <u>sécantes</u>, parallèles chacune à l'autre plan.

VI. Orthogonalité

REMARQUE

Ce paragraphe est hors programme. Il est néanmoins conseillé de le lire, car il aide à porter un regard plus acéré sur les figures de l'espace. En particulier, le dernier théorème (dont la démonstration est un peu plus dure que celles que nous avons vues), très utile, permet de « voir » des angles droits que l'œil seul, en perspective, ne peut identifier comme tels.

DÉFINITIONS

Deux droites de l'espace sont dites **perpendiculaires** si elles sont contenues dans un même plan et si, dans ce plan, elles sont perpendiculaires au sens de la géométrie plane.

Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** s'il existe une parallèle à l'une perpendiculaire à l'autre.

THÉORÈME 12

Si deux droites sont *orthogonales*, alors toute *parallèle* à l'une sécante avec l'autre est *perpendiculaire* à cette dernière.

DÉFINITION

Une droite est dite **orthogonale** à un plan lorsque cette droite est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

THÉORÈME 13

Pour qu'une droite soit orthogonale à un plan, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

La démonstration de ce théorème, non traitée ici, est plus difficile que celles des théorèmes précédents.

DÉFINITION

Deux plans de l'espace sont dits orthogonaux s'il existe une droite contenue dans l'un et orthogonale à l'autre.

VII. Polyèdres

On donne ici les définitions de quelques polyèdres particuliers.

Parallélépipède

Définition

Un **parallélépipède** est un hexaèdre dont les faces sont parallèles deux à deux.

Caractérisation

Un parallélépipède est un hexaèdre dont les faces sont des parallélogrammes.

Cas particuliers

Si les faces sont des rectangles, on parle de **parallélépipède rectangle**. Si les faces sont des carrés, le parallélépipède est un **cube**. Si l'on considère le parallélépipède et son intérieur, on l'appellera plutôt **pavé**. La parallélépipède est alors la surface du pavé. Si la surface est un parallélépipède rectangle, on parlera de **pavé droit**.

PRISME

Un **prisme** est un polyèdre formé de deux faces parallèles et isométriques, jointes par des parallélogrammes. Ce sont les plans qui contiennent les faces, qui sont parallèles. Ces deux faces parallèles et isométriques sont les **bases** du prisme. (Un prisme peut être vu comme un « cylindre à base polygonale ».)

PYRAMIDE

Une **pyramide** est un polyèdre formée d'une base polygonale dont tous les sommets sont reliés à un même point. Ce point ne doit pas appartenir au plan de la base. On peut l'appeler le sommet du prisme, mais on l'appelle aussi l'*apex*. (Une pyramide peut être vue comme un « cône à base polygonale ».)

CONVEXITÉ

Une figure est dite **convexe** lorsqu'en joignant deux de ses points, le segment obtenu est toujours inclus dans la figure. Une figure convexe n'a pas de « creux ». Parfois, un polygone ou un polyèdre qui n'est pas convexe est dit **« concave »** (penser au mot « cavité »).

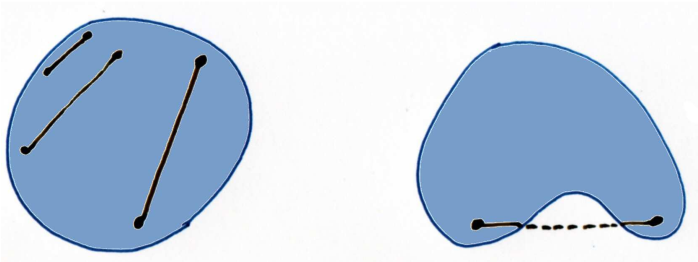
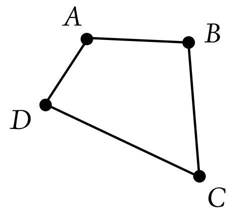


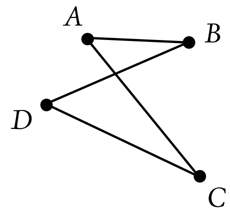
Figure convexe — Figure « concave »

EXPRIMER UN POLYÈDRE PAR SES SOMMETS

Lorsqu'on « nomme » un polygone, à partir de ses sommets, dans le plan, l'ordre dans lequel les points sont écrits correspond à un ordre dans lequel on pourrait tracer le polygone. Par exemple le quadrilatère *ABCD* n'est pas le même que le quadrilatère *ABDC*. Autrement dit, pour tracer le quadrilatère *ABDC*, on suit l'ordre dans lequel les points sont écrits.



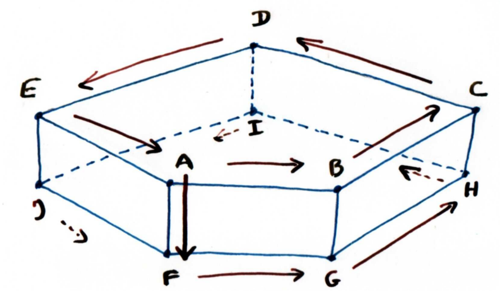
Quadrilatère *ABCD*



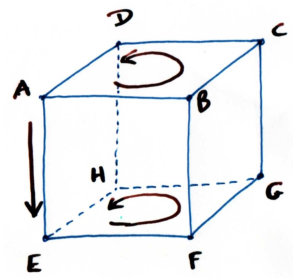
Quadrilatère *ABDC*

Pour un polyèdre, c'est différent. L'ordre des points n'a pas d'importance. Le polyèdre *ABCDEF* est le plus « petit » polyèdre convexe contenant les points en question. Si l'on a bien fait les choses, si l'on n'a pas ajouté de points inutiles, ces points sont tous des sommets du polyèdre. Le polyèdre *ABCDEF* est forcément identique au polyèdre *BADCFE*. On ne peut pas, en regardant simplement le « nom » du polyèdre, savoir quelles sont ses faces. Il faut regarder comment les sommets sont disposés. Pour résumer, à la condition de ne s'intéresser qu'aux polyèdres convexes, il est possible de décrire un polyèdre en donnant juste ses sommets, dans l'ordre qu'on veut. (Pour ce qui est des polyèdres non convexes, on ne peut pas dire que beaucoup de gens se préoccupent de les « nommer ».)

Mais il est des cas où, pour faciliter les choses, on s'entend sur un ordre. Ainsi, pour « nommer » un prisme, on donne d'abord le « nom » d'un des deux polygones qui lui sert de base, en tournant donc dans un certain sens, puis on repart du sommet situé « en face » sur l'autre base et l'on nomme les sommets de cette autre base en tournant dans le même sens :



Un cube étant un cas particulier de prisme, cette convention le concerne.



Pour « nommer » une pyramide, on donne d'abord son sommet, puis les sommets de sa base (en tournant).

La méconnaissance de ces conventions peut donner lieu à des malentendus fort préjudiciables.